

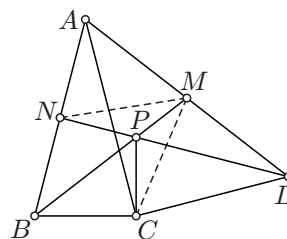


Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VII-a – soluții

Punctaj din oficiu 10 p

Problema 1. Determinați numerele reale x pentru care $\{x\} - \{2026 \cdot x\} = x$.*(Notăția $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .)**Soluție.* Știm că $x = [x] + \{x\}$ **1,5p**Ecuția dată se reduce la $-\{2026x\} = [x]$. Dar $0 \leq \{2026x\} < 1$, deci $-1 < -\{2026x\} \leq 0$, pe când $[x] \in \mathbb{Z}$ **6p**Deducem că soluțiile ecuației date sunt numerele reale care verifică egalitățile $[x] = 0$ și $\{2026x\} = 0$ **3p**De aici reiese că, pe de-o parte $2026x \in \mathbb{Z}$, pe de altă parte $0 \leq x < 1$ **6p**Atunci $2026x = k \in \mathbb{Z}$ implică $x = \frac{k}{2026}$, $k \in \mathbb{Z}$, iar $0 \leq x < 1$ revine la $0 \leq \frac{k}{2026} < 1$, deci la $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2025\}$. Conchidem că mulțimea soluțiilor este $\left\{0, \frac{1}{2026}, \frac{2}{2026}, \dots, \frac{2025}{2026}\right\}$ **6p****Problema 2.** a) Arătați că există numere naturale nenule a și b pentru care $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ este număr rațional.b) Care este cel mai mic număr natural nenul b pentru care există un număr natural a astfel ca $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ să fie număr rațional?*Gazeta Matematică**Soluție.* a) Un exemplu de pereche (a, b) de numere naturale nenule care îndeplinește condițiile din enunț este $(2025, 2)$. Într-adevăr, $2025^2 + 2026 \cdot 2^2 = 2025^2 + 4 \cdot 2025 + 4 = (2025 + 2)^2 = 2027^2$, deci $\sqrt{2025^2 + 2026 \cdot 2^2} = 2027 \in \mathbb{Q}$ **6p**b) Vom arăta că $b = 2$ este numărul cerut **3p**Așa cum am văzut, pentru $b = 2$ există un a convenabil, și anume $a = 2025$ **3p**Rămâne să mai arătăm că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil.Condiția ca $\sqrt{a^2 + 2026b^2}$ să fie număr rațional este echivalentă cu $a^2 + 2026b^2$ să fie pătrat perfect. **1,5p**Presupunând că ar exista $c \in \mathbb{N}$ pentru care $a^2 + 2026 = c^2$, ar trebui ca a și c să fie de aceeași paritate. Dar în acest caz $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ ar fi multiplu de 4, în vreme ce 2026 nu este multiplu de 4. Contradicția obținută arată că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil, deci cel mai mic număr b cu proprietatea din enunț este $b = 2$ **9p****Problema 3.** Considerăm triunghiul ABC cu $AB = AC = 2 \cdot BC$. Perpendiculara dusă în punctul C pe dreapta AC intersectează mediatoarea segmentului AB în punctul D . Fie M mijlocul segmentului AD , N mijlocul segmentului AB și P intersecția dreptelor BM și DN .a) Demonstrați că $PC \perp CB$.b) Demonstrați că $DC = 2 \cdot PC$.*Soluție.* a) Ne propunem să arătăm că $\triangle BPN \equiv \triangle BPC$ **1,5p**Pentru aceasta observăm că $CM = \frac{1}{2}AD = NM$, ca mediane în triunghiurile dreptunghice ACD și AND . Rezultă astfel $\triangle BNM \equiv \triangle BCM$ (LLL), deci $\angle NBM = \angle CBM$ **6p**

Deducem $\triangle BPN = \triangle BPC$ (LUL), deci $\angle PCB = \angle PNB = 90^\circ$ **6p**
b) Arătăm că $\triangle DCP \sim \triangle ACB$, (1), ceea ce implică $\frac{DC}{CP} = \frac{AC}{CB} = 2$ **3p**
Avem $\angle PCD = 90^\circ - \angle PCA = \angle ACB$ și $\angle DPC = 180^\circ - \angle NPC = 180^\circ - (360^\circ - \angle PNB - \angle PCB - \angle NBC) = \angle NBC$, ceea ce dovedește relația (1) **6p**

Problema 4. Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC și notăm cu M mijlocul ipotenuzei AC , cu N mijlocul segmentului CM , cu P piciorul perpendicularei din M pe BN , cu E piciorul perpendicularei din A pe BN și cu R piciorul perpendicularei din M pe AE .

Arătați că R este centrul de greutate al triunghiului ABP .

Soluție. Avem $AC = 2 \cdot AM = 4 \cdot CN$ **1,5p**

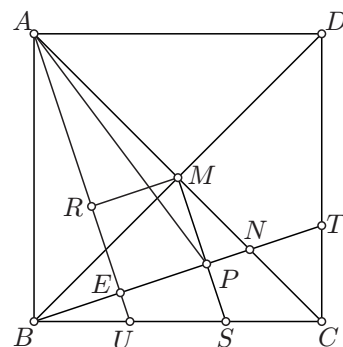
Deoarece $MR \parallel BN$, avem $\frac{AR}{AE} = \frac{AM}{AN} = \frac{2}{3}$ **3p**

Astfel, pentru a obține concluzia, este suficient să arătăm că AE este mediană în triunghiul ABP . Cum $AE \perp BN$, proprietatea precedentă se reduce la a dovedi că E este mijlocul segmentului BP **3p**

Construim pătratul $ABCD$ și considerăm punctele $U = AE \cap BC$, $T = BN \cap CD$. Atunci $\triangle TNC \sim \triangle BNA$ (TFA), deci $\frac{AB}{CT} = \frac{AN}{NC} = 3$. Apoi $\angle BAU = 90^\circ - \angle TBA = \angle TBC$ și obținem $\triangle BAU \equiv \triangle CBT$ (CU), de unde $BC = 3BU$, (1) .. **6p**

Din $AU \parallel MS$ și $AC = 2AM$ reiese că MS este linie mijlocie în triunghiul CAU , de unde $CS = SU$ **6p**

Folosind (1) reiese că $BU = US = SC$, ceea ce arată că EU este linie mijlocie în triunghiul BSP , deci E este mijlocul segmentului BP **3p**



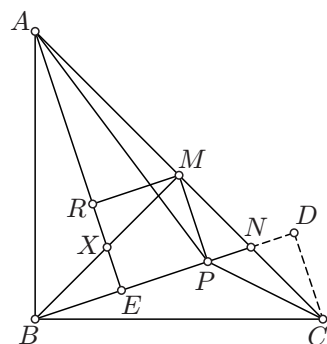
Altă soluție. Ca mai sus, este suficient să arătăm că E este mijlocul segmentului BP **1,5 + 3 + 3p**

Construim $CD \perp BN$, $D \in BN$. Atunci $\angle ABE = 90^\circ - \angle DBC = \angle BCD$, deci $\triangle ABE \equiv \triangle BCD$ (IU), de unde reiese $BE = CD$ **6p**

Apoi $\triangle MPN \equiv \triangle CDN$ (IU), deci $CD = MP$ **3p**

Avem $\angle MBP = 90^\circ - \angle BMP = \angle PMN$, de unde reiese $\triangle BMP \sim \triangle MNP$ **3p**

Obținem $\frac{BP}{MP} = \frac{BM}{MN} = \frac{MC}{MN} = 2$, de unde $BP = 2MP = 2CD = 2BE$, deci E este mijlocul segmentului BP **3p**



Altă soluție. Ca mai sus, arătăm că E este mijlocul segmentului BP **1,5 + 3 + 3p**

Fie X mijlocul segmentului BM . Atunci $AB = BC$, $BX = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}CM = CN$ și $\angle ABX = 45^\circ = \angle BCN$, deci $\triangle AXB \equiv \triangle BNC$ (LUL) **6p**

Rezultă $\angle ABE + \angle BAX = \angle ABE + \angle CBN = 90^\circ$, deci $AX \perp BP$, ceea ce arată că punctul X se află pe AE . Cum X este mijlocul segmentului BM și $XE \parallel MP$, reiese că XE este linie mijlocie în triunghiul BPM , deci E este mijlocul segmentului BP **9p**