

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ și operația $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$.

- Să se demonstreze că G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „*”.
- Demonstrați că legea „*” este asociativă.
- Știind că $(G_k, *)$ este grup abelian, să se demonstreze că funcția $f: G_1 \rightarrow (0, +\infty)$,
 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.
- Determinați numărul natural n pentru care avem, în grupul abelian $(G_1, *)$ ecuația:
 $\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519}$.

Soluție

a) $\forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow |x| < k, |y| < k \Rightarrow |xy| < k^2 \Rightarrow xy \in (-k^2, k^2) \Rightarrow k^2 + xy > 0$1p

Demonstrează că $-k(k^2 + xy) < k^2(x + y) < k(k^2 + xy)$, $\forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow$

$-k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k, \forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow x * y \in (-k, k)$, prin urmare G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „*”.....1p

b) Demonstrează asociativitatea.....1p

c) Demonstrează f morfism.....1p

Demonstrează f bijectivă..... 1p

d) Numerele reale $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{31}, \dots, \frac{1}{2n^2-1}$ sunt elemente ale mulțimii G_1 și din punctul c) știm că

$f: G_1 \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

Notăm $N = \frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1}$. Se demonstrează folosind metoda inducției matematice că

$f(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $\forall x_i \in G_1, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$f(N) = f\left(\frac{1}{7}\right) \cdot f\left(\frac{1}{17}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n^2-1}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}; f\left(\frac{506}{1519}\right) = \frac{1013}{2025}$$

$$\stackrel{f=inj}{\Rightarrow} \frac{n+1}{2n} = \frac{1013}{2025} \Rightarrow n = 2025$$
.....2p

Subiectul 2:

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- Calculați I_1, I_2 .
- Arătați că $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ este număr irațional.
- Comparați I_n și I_{n+2} și calculați $[2000 \cdot I_{50}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$2p

b) $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^2+x^4}{x^2+1} dx + \dots + \int_0^1 \frac{x^{2022}+x^{2024}}{x^2+1} dx$
 $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^6 dx + \dots + \int_0^1 x^{2022} dx$

$I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2023} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 2p

c) $\frac{x^{n-1}}{x^2+1} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2+1}, \forall x \in [0,1]$, funcțiile $\frac{x^{n-1}}{x^2+1}$ și $\frac{x^{n+1}}{x^2+1}$ sunt continue și integrabile pe intervalul $[0; 1] \Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+2}$1p

$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{n+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-2)}$1p

$n = 50 \Rightarrow \frac{1}{100} \leq I_{50} \leq \frac{1}{96} \Rightarrow 20 \leq 2000 \cdot I_{50} \leq \frac{2000}{96} < 21 \Rightarrow [2000 \cdot I_{50}] = 20$1p

Subiectul 3:

Fie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n), n \in \mathbb{N}^*$ și $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Calculați A_1 .

b) Calculați $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln(x) dx$ și $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$.

c) Arătați că: $(2n+1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $A_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 (x+1)(x+2) dx = \int_0^1 (x^2+3x+2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right)|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{23}{6}$1p

b) $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln(x) dx = \int_1^e (x+2) \ln(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx = \frac{e^2+9}{4}$1p

$\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{12}{5}$1p

c) Aplicăm inegalitatea mediilor, între media geometrică și media aritmetică, pentru două numere reale pozitive $a \neq b \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\text{Avem } \begin{cases} (x+1) \cdot (x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ (x+2) \cdot (x+2n-1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ \dots\dots\dots \\ (x+n) \cdot (x+n+1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \end{cases}, \text{ de unde obținem}$$

$$(x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^{2n} \dots\dots\dots 2p$$

Integrând cele două funcții continue pe intervalul $[0,1]$ și aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite obținem:

$$A_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n) dx < \int_0^1 \left(x+n+\frac{1}{2}\right)^{2n} dx =$$

$$\frac{\left(1+n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} < \frac{\left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow (2n+1)A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ..., 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x și y din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$, continuând procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr scris.

a) Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.

b) Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele a și b și scrie în locul lor numărul c , atunci are loc egalitatea: $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right)$.

c) Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt x_1, x_2, \dots, x_n cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, arătați că expresia $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ este invariantă (nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele x_1, x_2 și scriem în locul acestora numărul $x_1 * x_2$).

d) Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.

Soluție:

a) Calculează $2 * 3 = 1 \dots\dots\dots 1p$

$$b) c = a * b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{c} + 1 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b} + 1\right) + \left(\frac{1}{b} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right) \dots\dots\dots 1p$$

c) $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$, unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt numerele scrise la un anumit moment pe tablă. Fără a restrânge generalitatea, înlocuim x_1 și x_2 cu

$$x_1 * x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2}} \Rightarrow \text{pe tablă sunt numerele } x_1 * x_2, x_3, \dots, x_n \Rightarrow$$

$$E' = \left(\frac{1}{x_1 * x_2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_3} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right) \stackrel{b)}{=} \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right) = E \Rightarrow E \text{ este invariantă} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

d) Inițial $E = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2024} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2025} + 1\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2026}{2025} = 2026 \dots \dots \mathbf{2p}$

Dacă u este ultimul număr rămas pe tablă atunci $\frac{1}{u} + 1 = 2026 \Rightarrow \frac{1}{u} = 2025 \Rightarrow u = \frac{1}{2025} \dots \dots \dots \mathbf{1p}$