



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a IX –a – secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

a) Demonstrați că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$. Când are loc egalitatea?

b) Demonstrați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

c) Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime a, b, c știind că

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Subiectul 2

O mulțime $A \subset \mathbb{N}^*$ cu n elemente este *perfectă* dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului de elemente.

a) Determinați mulțimile *perfecte* cu trei elemente.

b) Arătați că orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar.

c) Dacă mulțimea A este *perfectă* și are n elemente, toate numere naturale consecutive, arătați că n este impar.

Subiectul 3

Fie $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}]$, $k \in \mathbb{N}^*$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) Calculați $E(50)$.

b) Determinați cel mai mic număr natural k pentru care $E(k) \geq 500$.

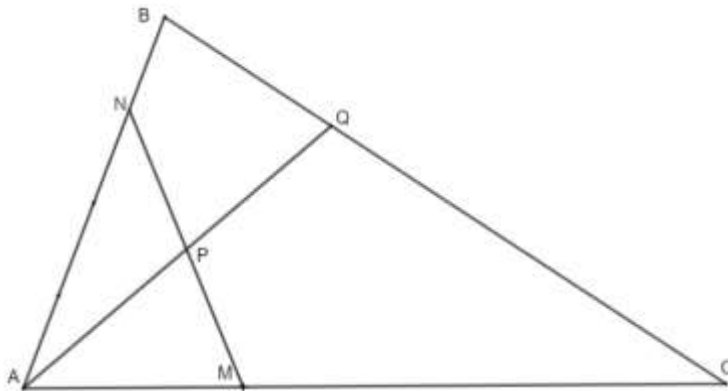
c) Rezolvați ecuația $E(n^2) = m$, unde numerele m și n sunt numere naturale prime între ele.

Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură: A, B, C, M, N, P și Q . Localitatea M este situată pe drumul AC astfel încât $AM = 40 \text{ km}$, $MC = 80 \text{ km}$. Localitatea N este situată pe drumul AB astfel încât



$\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$. Localitatea P este situată pe drumul MN la egală distanță de localitățile M și N . Localitatea Q este pe drumul BC , $BC = 260\text{ km}$, astfel încât punctele A, P, Q sunt coliniare și $CQ = k \cdot QB, k > 0$.



- Arătați că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.
- Exprimați vectorul \overrightarrow{AQ} în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} și de constanta k .
- Determinați constanta k și lungimea segmentului CQ .

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.