

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ și operația $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$.

a) Să se demonstreze că G_k este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „ $*$ ”.

b) Demonstrați că legea „ $*$ ” este asociativă.

c) Știind că $(G_k, *)$ este grup abelian, să se demonstreze că funcția $f: G_1 \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

d) Determinați numărul natural n pentru care avem, în grupul abelian $(G_1, *)$, ecuația:

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519}.$$

Subiectul 2

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_1 , I_2 .

b) Arătați că $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ este număr irațional.

c) Comparați I_n și I_{n+2} și calculați $[2000 \cdot I_{50}]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Subiectul 3

Fie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Calculați A_1 .

b) Calculați $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln x dx$ și $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$.

c) Arătați că: $(2n+1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ... , 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x și y din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$, continuând procedeul până când pe tablă

rămâne un singur număr scris.

- a) Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.
- b) Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele a și b și scrie în locul lor numărul c , atunci are loc egalitatea: $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{b} + 1\right)$.
- c) Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt x_1, x_2, \dots, x_n cu $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, arătați că expresia $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ este invariantă (nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele x_1, x_2 și scriem în locul acestora numărul $x_1 * x_2$).
- d) Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.