

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**Etapa județeană****08 martie 2025****XII. osztály - H2 - Természettudomány****1. feladat.**

Adott a $G_k = (-k, k)$, $k > 0$ halmaz és az $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$, $\forall x, y \in G_k$ művelet.

- a) Igazold, hogy a G_k stabil részhalmaza \mathbb{R} -nek a „ $*$ ” műveletre nézve!
- b) Igazold, hogy a „ $*$ ” asszociatív művelet!
- c) Tudva, hogy a $(G_k, *)$ Ábel-féle csoport igazold, hogy az $f: G_1 \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ függvény a $(G_1, *)$ és $((0, +\infty), \cdot)$ csoportok közötti izomorfizmus!
- d) Határozd meg azt az n természetes számot, amelyre a $(G_1, *)$ Ábel-féle csoportban teljesül az

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519} \text{ egyenlet!}$$

2. feladat.

Legyen $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Számítsd ki az I_1 és I_2 értékét!
- b) Igazold, hogy $I_1 + I_3 + I_5 + \dots + I_{2025}$ egy irracionális szám!
- c) Hasonlítsd össze az I_n és I_{n+2} tagokat, majd számítsd ki az $[2000 \cdot I_{50}]$, ahol $[a]$, az a valós szám egészrészét jelöli!

3. feladat.

Adott az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvény és az $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ sorozat.

- a) Számítsd ki az A_1 értékét!
- b) Számítsd ki az $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} \ln x dx$ és $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)} dx$ értékeit!
- c) Igazold, hogy $(2n+1) \cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. feladat.

Maria a táblára írja az 1, 2, 3, ... , 2025 számokat. Minden lépésben kiválaszt két tetszőleges x és y számot,

és kicseréli az $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}}$ számmal, majd folytatja ezt az eljárást, amíg végül csak egy szám

marad a táblán.

- a) Ha Maria az első lépésben a 2-es és 3-as számokat törli, számítsd ki, hogy milyen számot ír ezek helyére!
- b) Igazold, hogy ha Maria a tábláról letöröli az a és b számokat és helyükre egy c számot ír, akkor teljesül az $\frac{1}{c} + 1 = \left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)$ összefüggés!
- c) Ha egy adott pillanatban a táblán lévő számok x_1, x_2, \dots, x_n , ahol $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$, akkor igazold, hogy az $E = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{x_n} + 1\right)$ kifejezés invariáns, azaz nem változik, amikor például az x_1 és x_2 számokat eltávolítjuk, és ezek helyére az $x_1 * x_2$ kerül!
- d) Határozd meg a táblán maradt számot 2024 lépés után!

Munkaidő 3 óra.

Minden feladatot 0-tól 7-ig pontozunk.