



## Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

### Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a IX-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

### Barem de notare și evaluare

#### Subiectul 1

- a) Demonstrați că  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ , pentru orice  $x, y \in (0, +\infty)$ . Când are loc egalitatea?
- b) Demonstrați că dacă  $a, b, c$  sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci  $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$ , unde  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .
- c) Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime  $a, b, c$  știind că  $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

#### Soluție:

- a) Inegalitatea este echivalentă cu  $(x+y)^2 \geq 4x \cdot y$  sau  $(x-y)^2 \geq 0, \forall x, y \in (0, +\infty)$  .....2p  
Egalitatea are loc pentru  $x = y$  .....1p
- b) Conform a) avem  $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c}$  și analogele .....1p  
De unde prin însumare  $\Rightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  .....1p  
Egalitatea are loc pentru triunghi echilateral.
- c)  $\frac{1}{b+c-a} = \frac{1}{a+b+c-2a} = \frac{1}{2p-2a}$  și analogele .....1p  
Condiția devine  $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$  conform a) și b) obținem  $p-a = p-b = p-c$  deci  
triunghiul este echilateral .....1p

#### Subiectul 2

O mulțime  $A \subset \mathbb{N}^*$  cu  $n$  elemente este perfectă dacă suma elementelor sale, este egală cu pătratul numărului de elemente.

- a) Determinați mulțimile perfecte cu trei elemente.
- b) Arătați că orice mulțime perfectă conține cel puțin un număr impar.
- c) Dacă mulțimea  $A$  este perfectă și are  $n$  elemente, numere naturale consecutive, arătați că  $n$  este impar.

#### Soluție:

$A = \{a, b, c\}, a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c$  distincte și  $a + b + c = 9$  .....1p  
Găsim mulțimile  $\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}$  și  $\{2, 3, 4\}$  .....2p

- b) Presupunem prin reducere la absurd că există o mulțime  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  cu  $n$  elemente numere pare distincte nenule și  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$  .....1p  
 $n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n$ , fals. Presupunerea făcută este falsă, deci orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar. ....1p  
c)  $A = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + (n - 1)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$  .....1p  
 $n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n = 2a + n - 1 \Rightarrow n = 2a - 1 \Rightarrow n$  este număr impar .....1p

### Subiectul 3

Fie  $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}]$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

- Calculați  $E(50)$ .
- Determinați cel mai mic număr natural  $k$  pentru care  $E(k) \geq 500$ .
- Rezolvați ecuația  $E(n^2) = m$ , unde numerele  $m$  și  $n$  sunt numere naturale prime între ele.

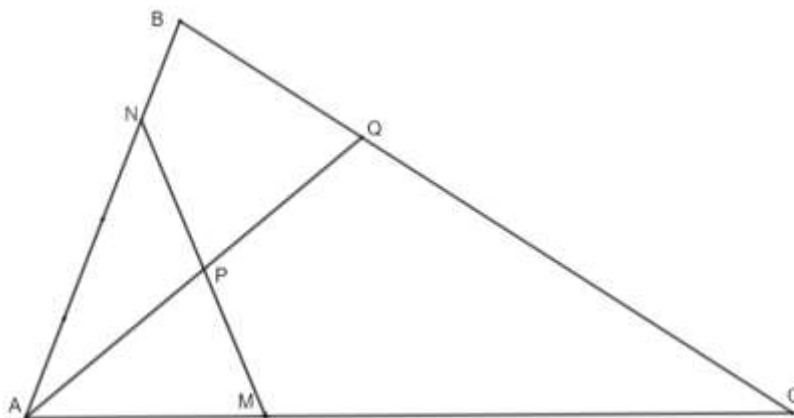
### Soluție:

- a)  $E(50) = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}]) + \dots + ([\sqrt{36}] + [\sqrt{37}] + \dots + [\sqrt{48}]) + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$  .....2p  
 $E(50) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 7 = 217$  .....1p  
b)  $E(n^2 - 1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n - 1)(2n - 1)$  .....1p  
 $E(9^2 - 1) = 444$ . Cum  $500 - 444 = 56$ , iar  $56 : 9 = 6, (2)$  trebuie adunați șapte termeni, în sumă. Obținem  $E(87) = 507$ , deci  $k_{\min} = 87$ . ....1p  
c)  $E(n^2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n - 1)(2n - 1) + n = n + 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + \dots + n) + n = 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$  .....1p  
Obținem  $4n^3 - 3n^2 + 5n = 6m$ . Rezultă  $6m : n$  și cum numerele  $m$  și  $n$  sunt numere naturale prime între ele, avem  $6 : n$ . Găsim soluțiile  $(m, n) \in \{(1, 1), (5, 2), (16, 3), (131, 6)\}$ . ....1p

### Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură:  $A, B, C, M, N, P$  și  $Q$ . Localitatea  $M$  este situată pe drumul  $AC$  astfel încât  $AM = 40 \text{ km}$ ,  $MC = 80 \text{ km}$ . Localitatea  $N$  este situată pe drumul  $AB$  astfel încât  $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$ . Localitatea  $P$  este situată pe drumul  $MN$  la egală distanță de localitățile  $M$  și  $N$ . Localitatea  $Q$  este pe drumul  $BC$ ,  $BC = 260 \text{ km}$  astfel încât punctele  $A, P, Q$  sunt coliniare și  $CQ = k \cdot QB, k > 0$ .

- Arătați că  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8} \overrightarrow{AB}$ .
- Exprimați vectorul  $\overrightarrow{AQ}$  în funcție de vectorii  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{AC}$  și de constanta  $k$ .
- Determinați constanta  $k$  și lungimea segmentului  $CQ$ .



**Soluție:**

a)  $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$  .....1p

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  .....1p

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$  .....1p

b)  $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$  .....2p

c)  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$  sunt vectori coliniari, rezultă că  $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AQ}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{k+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{ak}{k+1} = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{9}{4}$  .....1p

$\frac{CQ}{QB} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{CQ}{BC} = \frac{9}{13} \Rightarrow CQ = 180 \text{ km}$ .....1p