

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia  
XXXIII. EMMV  
megyei szakasz, 2024. február 3.

XII. osztály

1. feladat. Határozd meg az  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  deriválható függvényt, ha

$$f(1) = e \quad \text{és} \quad f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} + e^x \quad \text{bármely } x > 0 \text{ esetén!}$$

2. feladat. a) Adott a  $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ ax + b & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$  halmaz, ahol  $a, b \in \mathbb{R}$ . Határozd meg azokat az  $a$  és  $b$  számokat, amelyekre a  $(G_1, \cdot)$  Abel-féle csoport!

b) Határozd meg azokat az  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeket, amelyekre a  $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$  halmaz csoportot alkot a mátrixok szorzásával!

3. feladat. Határozd meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^{1517}}{x^{2024} + 1}$  függvény primitívjeit!

4. feladat. Igazold, hogy a 2024-nek van olyan többszöröse, amelyben a  $0, 1, 2, \dots, 9$  számjegyek mindegyike szerepel!